Санкт-Петербургский государственный университет

Кузнецов Александр Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

«Полнота биортогональных систем для нескольких интервалов»

Уровень образования: магистратура
Направление: 01.04.01 «Математика»
Основная образовательная программа: ВМ.5832.2019
Профиль (при наличии): нет

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
Профессор факультета МКН СПБГУ
Белов Юрий Сергеевич

Рецензент:
Доктор физико-математических наук,
Профессор университета Экс-Марсель
Боричев Александр Александрович

Санкт-Петербург
2021 год

Содержание

1 Введение

В сеперабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (над $\mathbb{C}$) рассмотрим систему векторов $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Будем называть эту систему векторов *полной*, если их конечные линейные комбинации плотны в $\mathcal{H}$:

$$\operatorname{Cl}\operatorname{span}\{f_n\} = \mathcal{H}.$$

Полную систему векторов будем называть *минимальной*, если при удалении из нее любого элемента она теряет свойство полноты.

Частные случаи полных минимальных систем — ортонормированные базис, базис Рисса (то есть образ ортонормированного базиса при линейном ограниченном обратимом отображении) и базис суммирования. Мы будем пользоваться следующим определением базиса Рисса: это полная система векторов $\{f_n\}$, которая для всякой финитной последовательности $\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{C})$ и некоторых положительных констант A и B удовлетворяет неравенству:

$$A \sum |a_n|^2 \le \left\| \sum a_n f_n \right\|^2 \le B \sum |a_n|^2.$$

Для каждой полной и минимальной системы $\{f_n\}$ существует единственная *биортогональная* система $\{g_n\}$, то есть удовлетворяющая при всех $n, m \in \mathbb{N}$ условию

$$\langle g_n, f_m \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \ne n; \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Биортогональная система для полной минимальной системы не обязательно полна. Заметим, что если она полна, то обязательно и минимальна. Действительно, при удалении из нее элемента g_n все остальные элементы ортогональны f_n, откуда следует, что полученная система не полна. При этом f_n отлично от нуля в силу полноты исходной системы.

1.1 Системы из экспонент

Хорошо известно, что для некоторых систем специального вида биортогональная система всегда полна.

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — объединение нескольких непересекающихся отрезков. За $|I|$ будем обозначать сумму их длин. Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ точек вещественной прямой положим

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{e^{i\lambda t} | \lambda \in \Lambda\}.$$

Если такая система полна и минимальна в $L^2(I)$, биортогональную систему будем обозначать $G(\Lambda) = \{g_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$.

Р. Янг [1] доказал, что если I — отрезок и $\mathcal{E}(\Lambda)$ — полная и минимальная система в $L^2(I)$, то биортогональная система также полна. Мы обобщим этот результат на случай, когда I — объединение двух непересекающихся отрезков.

Теорема 1. *Пусть I — объединение двух отрезков. Если система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна и минимальна в $L^2(I)$, а также*

$$D_+(\Lambda) = \limsup_{R\to\infty} \frac{\operatorname{card}(\Lambda \cap (-R, R))}{2R} = \frac{|I|}{2\pi}. \tag{1}$$

Тогда биортогональная система $G(\Lambda)$ также полна в $L^2(I)$.

В случае одного интервала для полной и минимальной системы экспонент условие (1) на плотность выполняется всегда. Однако, уже в случае двух интервалов не ясно, выполнено ли такое условие для любой полной и минимальной системы.

Г. Ландау доказал, что [15] для базиса Рисса $\mathcal{E}(\Lambda)$ в $L^2(E)$ для любого измеримого множества E конечной меры всегда выполняется условие (1) (за E обозначаем его меру Лебега). Более того, в этом случае нижняя плотность E также равна $|E|/(2\pi)$.

Проблема полноты экспоненциальных систем в $L^2(a, b)$ — трудная задача гармонического анализа, окончательный результат в которой (формула радиуса полноты) принадлежит А. Берлингу и П. Мальявену [2]. Изучение свойств экспоненциальных систем — одна из ключевых задач гармонического анализа 20 века. Особенно трудным представляется случай несвязного подмножества прямой. Обзор такого рода результатов можно, в частности, найти в книге А. Олевского и А. Улановского [5].

Тонкие вопросы, связанные с устройством полных и минимальных систем экспонент на отрезке, а также аналогичные результаты для систем воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа представлены в работах Е. Фрикейна [6]; А. Баранова, Ю. Белова и А. Боричева [7, 8]. Аналогам теоремы Юнга для пространств Фока посвящены статьи [9, 10].

Развитие идей из доказательства теоремы 1 позволяет установить аналогичный результат и в случае трех интервалов. Этот результат получен совместно с А. Барановым и Ю. Беловым.

2 Полнота биортогональной системы

Мы будем доказывать теорему 1 в случае

$$I = I^- \cup I^+ = [0, a] \cup [b, 2\pi], \quad 0 < a < b < 2\pi.$$

Остальные случаи сводятся к этому линейным преобразованием. Сдвиг Λ на вещественное число сохраняет свойство полноты и минимальности как самой системы, так и биортогональной. Таким образом, мы можем считать, что множество Λ не содержит целых чисел.

Для функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ с компактным носителем E обозначим за

$$\mathcal{F}(f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_E f(x) e^{-izx} dx$$

ее преобразование Фурье. Как известно, $\mathcal{F}(f)$ — целая функция конечного экспоненциального типа.

Пространство Пэли-Винера, соответствующее E, то есть гильбертово пространство всех целых функций, полученных таким образом (для данного E), мы будем обозначать PW_E.

Преобразование Фурье — унитарный оператор, действующий из $L^2(E)$ в PW_E. В случае $E = [-a, a]$ положим $PW_a = PW_E$. Нам будет удобно считать функции из $L^2(E)$ продолженными нулем на всю вещественную прямую.

2.1 Свойство деления в пространстве Пэли-Винера

Хорошо известно, что в случае одного интервала преобразования Фурье биортогональных элементов $\mathcal{F}g_\lambda$ пропорциональны функции $\dfrac{F(z)}{z-\lambda}$ для функции

$$F(z) = \mathcal{F}g_{\lambda_1}(z)(z - \lambda_1).$$

Функция F называется *порождающей* для системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Ее нули — в точности элементы Λ, и все эти нули простые.

Для удобства, мы приведем доказательство этого утверждения. Наличие явной формулы для биортогональных элементов обусловлено тем, что пространство PW_E обладает *свойством деления* в случае, когда E — отрезок.

Лемма 1. *Пусть* $E = [a, b]$, $G \in PW_E$ *и* $G(\omega) = 0$ *при некотором* $\omega \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\frac{G(z)}{z-\omega} \in PW_E$.

Лемма 1 в случае $E = [-r, r]$ следует из теоремы Пэли-Винера.

Теорема (Paley, Wiener)**.** *Функция H лежит в пространстве PW_r в том и только в том случае, когда H — целая функция экспоненциального типа не выше r, квадратично суммируемая на вещественной прямой, то есть*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{|z|\geq r} \frac{\log|H(z)|}{|z|} \leq r, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} |H(x)|^2 dx < \infty.$$

В такой формулировке ее можно найти в [15].

Указанный выше случай достаточно рассмотреть, поскольку пространства Пэли-Винера для интервалов, отличающихся параллельным переносом, получаются друг из друга следующим образом:

$$PW_{[p+s,q+s]} = \{H(z)e^{isz} | H \in PW_{[p,q]}\}.$$

Таким образом, лемма 1 доказана в общем случае.

Далее заметим, что $\mathcal{F}g_{\lambda_1}(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_1\}$, поэтому

$$F(z) = \mathcal{F}g_{\lambda_1}(z)(z - \lambda_1)$$

обнуляется во всех точках Λ. Также

$$\frac{F(z)}{z-\lambda} = \mathcal{F}g_{\lambda_1}(z) + \frac{(\lambda - \lambda_1)\mathcal{F}g_{\lambda_1}(z)}{z - \lambda}.$$

Согласно лемме, оба слагаемых лежат в PW_E, а тогда и $\frac{F(z)}{z-\lambda} \in PW_E$. Тогда эта функция является Фурье-образом некоторой функции h из $L^2(E)$. Кроме того, она обнуляется во всех точках $\Lambda \setminus \{\lambda\}$, поэтому h ортогональна всем функциям из $\mathcal{E}(\Lambda \setminus \{\lambda\})$, откуда и следует, что h пропорциональна g_λ. А тогда и функция $\mathcal{F}(g_\lambda)$ отличается умножением на константу от функции $\frac{F(z)}{z-\lambda}$. В частности, отсюда следует, что функция $\frac{F(z)}{z-\lambda}$ не обнуляется в точке Λ, поэтому все нули функции F из множества Λ — простые.

Покажем, что других нулей у функции F нет. Если $F(\omega) = 0$ при $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, рассуждая аналогично, имеем, что $\frac{F(z)}{z-\omega} \in PW_E$. Но эта функция обнуляется во всех точках Λ, что противоречит полноте $\mathcal{E}(\Lambda)$.

2.1.1 Свойство деления в пространстве на двух отрезках

Рассмотрим иное доказательство леммы 1. Оно поясняет, почему свойство деления не обязательно выполняется в случае, когда множество E — объединение двух отрезков. Мы приведем рассуждения для множества $I = [0, a] \cup [b, 2\pi]$.

Пусть $G = \mathcal{F}g$. Обозначим

$$s(x) = \int\limits_0^x g(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Отметим, что $s(0) = 0$ и $s(2\pi) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}g(\omega) = G(\omega) = 0$. Значит, функция s также лежит в $L^2(\mathbb{R})$, при этом $\text{supp}(s) \subset I$, а также $s'(x) = g(x)e^{-i\omega x}$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Положим $h(x) = is(x)e^{i\omega x}$. Тогда $h \in L^2(E)$. Заметим, что

$$\mathcal{F}h(z) = \mathcal{F}(is(x)e^{i\omega x})(z) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} s(x)e^{-i(z-\omega)x}dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(z-\omega)} \int\limits_{\mathbb{R}} s'(x)e^{-i(z-\omega)x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(z-\omega)} \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\omega x} = \frac{G(z)}{z-\omega}.$$

Отсюда видно, что носитель построенной выше функции h не обязательно содержится в I: функция r постоянна на промежутке (a, b), и она может не обращаться в нуль на этом промежутке.

Заметим, что каждая функция $F \in PW_I$ единственным образом представляется в виде $F^+ + F^-$, где $F^- \in PW_{I^-}, F^+ \in PW_{I^+}$, поскольку в гильбертовом пространстве PW_I подпространства PW_{I^-} и PW_{I^+} являются ортогональными дополнениями друг друга. А именно, если $F = \mathcal{F}f$, то $F^- = \mathcal{F}(f^-)$ и $F^+ = \mathcal{F}(f^+)$, где $f^- = \chi_{[0,a]}f$ и $f^+ = \chi_{[b,2\pi]}f$.

Лемма 2. *Если ω — нуль целой функции $G \in PW_I$, то $\frac{G(z)}{z-\omega} \in PW_I$ в том и только в том случае, когда $G^-(\omega) = 0$.*

Отметим, что при условии $G(\omega) = 0$ равенства $G^-(\omega) = 0$ и $G^+(\omega) = 0$ эквивалентны. Перейдем к доказательству леммы. Пусть $\mathcal{F}g = G$. Определим функции s и h как в доказательстве леммы 1. Тогда $\frac{G(z)}{z-\omega} \in PW_I$ в том и только в том случае, когда $\text{supp}\, h \subset I \Leftrightarrow \text{supp}\, s \subset I$, что эквивалентно равенству $g(a) = 0$, поскольку функция g обнуляется на промежутке (a, b). Остается заметить, что $g(a) = \sqrt{2\pi}G^-(\omega)$. Лемма 2 докзана.

2.2 Биортогональные элементы полной минимальной системы для двух отрезков

Модифицировав рассуждения из предыдущей части, мы получим похожие соотношения на фурье-образы биортогональных элементов.

2.2.1 Соотношения между биортогональными элементами

Обозначим $G_k = \mathcal{F}g_{\lambda_k}$. Из определения биортогональной системы следует, что функция $G_k(z)$ обнуляется во всех точках Λ, кроме λ_k. Также $G_k \in PW_I$. Пусть $F_k(z) = G_k(z)(z - \lambda_k)$ и $F_k^{\pm}(z) = G_k^{\pm}(z)(z - \lambda_k)$.

Утверждение 1. *Если $F_1^-(\lambda_2) \neq 0$, то для каждого $k \in \mathbb{Z}$ при некотором $c_k \neq 0$ выполнено соотношение*

$$G_k(z) = c_k \frac{F_2^-(\lambda_k)F_1(z) - F_1^-(\lambda_k)F_2(z)}{z - \lambda_k}. \tag{2}$$

Заметим, что функция $F_1^-(z)$ не может обнуляться во всех точках Λ. Действительно, в противном случае

$$R(z) = F_1^-(z)e^{-iaz/2} \in PW_c,$$

где $c = a/2$. Но тогда тип функции T не превосходит c, при этом Λ содержится в множестве нулей функции R и $D^+(\Lambda) = |I|/2\pi > c/\pi$, что противоречит формуле Йенсена. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $F_1^-(\lambda_2) \neq 0$. Теперь мы приступим к доказательству утверждения 1. Для этого нам потребуется доказать два вспомогательных утвреждения (лемма 3 и лемма 4).

Положим

$$\begin{aligned}
&F_k(z) = G_k(z)(z - \lambda_k), \quad F_k^{\pm}(z) = G_k^{\pm}(z)(z - \lambda_k),\\
&P_{\pm}^{\omega}(z) = F_1(z)F_2^{\pm}(\omega) - F_2(z)F_1^{\pm}(\omega),\\
&Q_{\pm}^{\omega}(z) = G_1(z)G_2^{\pm}(\omega) - G_2(z)G_1^{\pm}(\omega).
\end{aligned}$$

Лемма 3. *Следующие условия при $k \neq j$ эквивалентны:*
(i) F_k и F_j отличаются умножением на константу.
(ii) $F_k^-(\lambda_j) = 0$.

Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна, докажем $(ii) \Rightarrow (i)$. Заметим, что

$$\frac{F_k(z)}{z - \lambda_j} = \frac{G_k(z)(z - \lambda_k)}{z - \lambda_j} = G_k(z) + \frac{(\lambda_j - \lambda_k)G_k(z)}{z - \lambda_j}.$$

Поскольку $F_k^-(\lambda_j) = 0$, то $G_k^-(\lambda_j) = 0$. Из леммы 2 получаем, что $\dfrac{F_k(z)}{z-\lambda_j} \in PW_I$, пусть

$$\mathcal{F}(r(x)) = \frac{F_k(z)}{z-\lambda_j}.$$

Поскольку функция $\dfrac{F_k(z)}{z-\lambda_j}$ обнуляется во всех точках $\Lambda\backslash\{\lambda_j\}$, то функия $r(x)$ ортогональна всем функциям $e^{-i\lambda x}$ при $x \in \Lambda \setminus \{\lambda_j\}$. Следовательно, функция r пропорциональна биортогональному элементу g_{λ_k}. А тогда и F_k отличается от F_j умножением на константу. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\omega \in \mathbb{C}$.

(i) Если $P_-^\omega(\omega) = 0$, *то функция* $\dfrac{P_-^\omega(z)}{z-\omega}$ *лежит в* PW_I.

(ii) Если $P_+^\omega(\omega) = 0$, *то функция* $\dfrac{P_+^\omega(z)}{z-\omega}$ *лежит в* PW_I.

Докажем (i), рассуждение для (ii) аналогично. Разберем сначала случай, когда ω отлично от λ_1 и λ_2. Преобразуем:

$$\frac{P_-^\omega(z)}{(z-\omega)(\lambda_1-\omega)(\lambda_2-\omega)} = \frac{G_1(z)G_2^-(\omega)(z-\lambda_1)}{(z-\omega)(\lambda_1-\omega)} - \frac{G_2(z)G_1^-(\omega)(z-\lambda_2)}{(z-\omega)(\lambda_2-\omega)} =$$
$$\frac{G_1(z)G_2^-(\omega) - G_2(z)G_1^-(\omega)}{z-\omega} - \frac{G_1(z)G_2^-(\omega)}{\lambda_1-\omega} + \frac{G_2(z)G_1^-(\omega)}{\lambda_2-\omega}.$$

Поскольку

$$\frac{G_1(z)G_2^-(\omega)}{\lambda_1-\omega} - \frac{G_2(z)G_1^-(\omega)}{\lambda_2-\omega} \in PW_I,$$

лемма эквивалентна тому же утверждению, но для функции Q_-^ω вместо P_-^ω. Согласно лемме 2 достаточно проверить, что $(Q_-^\omega)^-(\omega) = 0$, что, очевидно, выполняется. Остается случай $\omega = \lambda_1$ (и аналогичный $\omega = \lambda_2$), но тогда $\dfrac{P_\omega^-(z)}{z-\omega} = G_1(z)F_2^-(\lambda_1) \in PW_I$. Лемма 4 доказана.

Вернемся к доказательству утверждения 1. Поскольку $F_1^-(\lambda_2) = 0$, то согласно лемме 3 функции F_1 и F_2 не могут отличаться умножением на константу. Тогда при любом $\lambda_k \in \Lambda$ функция $P_-^{\lambda_k}$ отлична от тождественного нуля. Действительно, в противном случае, либо $F_1^-(\lambda_k) = 0 = F_2^-(\lambda_k)$, но тогда F_1 и F_2 пропорциональны F_k в силу леммы 2, а, значит, и сами отличаются в константу раз; либо же $F_1^-(\lambda_k)$ и $F_2^-(\lambda_k)$ отличны от нуля, и то же противоречие.

Таким образом, функция $P_-^{\lambda_k}(z)/(z-\lambda_k) \in PW_I$ обращается в нуль во всех точках $\Lambda \setminus \{\lambda_k\}$ и отлична от тождественного нуля. Следовательно,

$$P_-^{\lambda_k}(z)/(z-\lambda_k) = c_k \mathcal{F}(g_{\lambda_k})(z) \tag{3}$$

при некотором $c_k \neq 0$. Утверждение 1 доказано.

2.2.2 Порождающая функция полной минимальной системы

Рассмотрим функцию

$$\big(F_1^+(z)F_2^-(z) - F_1^-(z)F_2^+(z)\big)\exp\{-i(2\pi + a + b)z/2\}.$$

Мы докажем, что эта функция — порождающая для системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, то есть ее нули — в точности элементы множества Λ и все эти нули простые;

Также, используя условие на плотность (1) мы поймем, что эта функция — порядка 1 и типа $|I|/2$.

Предположим, что при некотором $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ каждая из функций $P_\pm^\omega(z)$ — тождественный нуль. Поскольку F_1 и F_2 не пропорциональны, мы получаем, что $F_1^-(\omega) = F_1^+(\omega) = 0$. Тогда $F_1(\omega) = 0$. Значит, $F_1^-(z)/(z-\omega) \in PW_I$ согласно лемме 2. Однако, эта функция обнуляется во всех точках Λ, что противоречит полноте $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Если же, без ограничения общности, функция $P_\omega^-(z)$ отлична от тождественного нуля и $P_\omega^-(\omega) = 0$, то $P_\omega^-(z)/(z-\omega) \in PW_I$, как и ранее получаем противоречие с полнотой $\mathcal{E}(\Lambda)$. Значит, $P_\omega^-(\omega) \neq 0$.

Обозначим $S(z) = F_1^+(z)F_2^-(z) - F_1^-(z)F_2^+(z)$. Заметим, что

$$S(z) = F_1(z)F_2^-(z) - F_1^-(z)F_2(z) = F_1^+(z)F_2(z) - F_1(z)F_2^+(z).$$

Значит, $P_\omega^-(\omega) = S(\omega)$ и $P_\omega^+(\omega) = -S(\omega)$. Следовательно, функция S обращается в нуль только в точках Λ. Покажем, что все эти нули функции S — простые. Пусть $\lambda \in \Lambda$. Из (3) имеем, что λ — простой корень P_-^λ. Таким образом, мы получаем, что

$$S'(\lambda) = F_1'(\lambda)F_2^-(\lambda) + F_1(z)F_2^{-\prime}(\lambda) - F_1^-(\lambda)F_2'(\lambda) - F_1^{-\prime}(\lambda)F_2(\lambda) =$$
$$F_1'(\lambda)F_2^-(\lambda) - F_1^-(\lambda)F_2'(\lambda) = (P_-^\lambda)'(\lambda) \neq 0.$$

Значит, λ — простой нуль функции S. Из определения функции S следует, что $S \in PW_{[b;\pi+a]}$. Тогда

$$T(z) = S(z)\exp\{-i(2\pi + a + b)z/2\} \in PW_{|I|/2}. \tag{4}$$

Таким образом, множество нулей функции T совпадает с множеством Λ, и все эти нули простые. Значит, согласно (1), верхняя плотность множества нулей T равна $|I|/2\pi$, поэтому из формулы Йенсена мы получаем, что тип функции T не меньше $|I|/2$. Однако, из (4) следует, что тип функции T не превосходит $|I|/2$. Таким образом, тип функции T в точности равен $|I|/2$.

2.2.3 Полнота биортогональной системы

Нам потребуется построить базис Рисса $\mathcal{E}(\Gamma)$ в $L^2(I)$, где $\Gamma \subset \mathbb{Z}$, отвечающий следующему дополнительному условию.

Условие 1. *Пусть $I \subset [0, 2\pi]$, $\Gamma \subset \mathbb{Z}$. Существует целая функция H порядка 1 типа $|I|/2$ ограниченная по модулю на $\mathbb{R}$ такая, что множество ее нулей совпадает с Γ, и все эти нули — простые.*

Мы приведем это построение позднее в параграфе (2.3). Для начала, завершим доказательство теоремы 1 с помощью этого утверждения.

Предположим, что система $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ не полна. Тогда существует функция $h \in L^2(I)$, тождественно не равная нулю и ортогональная всем биортогональным элементам. Положим $h(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} t_n e^{-i\gamma_n x}$. Тогда для всякого $\lambda \in \Lambda$ имеем

$$0 = \langle c_\lambda g_\lambda, h\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(cg_\lambda)(\gamma_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t_n \frac{F_1(\gamma_n)F_2^-(\lambda) - F_2(\gamma_n)F_1^-(\lambda)}{\gamma_n - \lambda},$$

Положим

$$p_-(z) = H(z) \sum_{n\in\mathbb{Z}} t_n \frac{F_1(\gamma_n)F_2^-(z) - F_2(\gamma_n)F_1^-(z)}{z - \gamma_n}. \tag{5}$$

Поскольку p_- обращается в нуль на Λ, то $p_-(z) = T(z)V_-(z)$. Заметим, что функция $e^{-iaz/2}p_-(z)$ имеет тип $a/2 + |I|/2$, тип же функции T равен $|I|/2$. Поскольку эти функции лежат в классе Картрайт, то тип функции $e^{-iaz/2}V_-(z)$ равен $a/2 = |I^-|/2$. Кроме того,

$$V_-(\gamma_n)T(\gamma_n) = t_n S(\gamma_n)H'(\gamma_n). \tag{6}$$

По принципу максимума модуля для целой функции $\dfrac{H(z)}{z - \gamma_n}$ ее значение в точке γ_n (то есть $H'(\gamma_n)$) по модулю не превосходит максимума на окружности $|z - \gamma_n| = 1$. Эта окружность содержится в полосе $|\Im z| \le 1$. Функция H ограничена по модулю на $\mathbb{R}$. Значит, по принципу

Фрагмена-Линделёфа функция $|H|$ ограничена в полосе $|\Im z| \leq 1$. Следовательно, значения $|H'(\gamma_n)|$ при $n \in \mathbb{Z}$ равномерно ограничены. Кроме того, из (4) и (6) имеем $|V_-(\gamma_n)| = |t_n H'(\gamma_n)| \in \ell^2$. Отсюда следует, что $e^{-iaz/2} V_- \in PW_{a/2}$, откуда $V_- \in PW_{I^-}$.

Определим аналогично функцию

$$p_+(z) = H(z) \sum_{n \in \mathbb{Z}} t_n \frac{F_1(\gamma_n) F_2^+(z) - F_2(\gamma_n) F_1^+(z)}{z - \gamma_n} \tag{7}$$

и функцию $V_+(z)$. Рассуждая аналогично, мы получаем, что $V_+ \in PW_{I^+}$. Кроме того,

$$V_+(\gamma_n) = t_n S(\gamma_n) H'(\gamma_n) / T(\gamma_n) = V_-(\gamma_n).$$

Следовательно, функция $V(z) = V_+(z) - V_-(z)$ обнуляется на Γ и лежит в PW_I. В силу полноты системы $\mathcal{E}(\Gamma)$ в $L^2(I)$ это означает, что $V(z) \equiv 0$. Но поскольку $I^- \cap I^+ = \emptyset$, то и $V_- \equiv 0, V_+ \equiv 0$. В таком случае и $h \equiv 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Отметим, что в случае, когда множество I — объединение n отрезков, можно выразить аналогичным способом биортогональные элементы через первые n, а также построить порождающую функцию из параграфа 2.2.2. Нам совместно с А. Барановым и Ю. Беловым удалось обобщить теорему 1 на случай трех отрезков, в случае большего числа наше доказательство проходит для некоторых специальных случаев расположения отрезков. Этот результат не входит в данную работу.

2.3 Построение базиса Рисса в $L^2(I)$

В предыдущей части мы использовали тот факт, что существует базис Рисса $\mathcal{E}(\Gamma)$, где $\Gamma \subset \mathbb{Z}$, отвечающий дополнительному условию 1. Почему именно базис Рисса?

В случае, когда I — отрезок, в $L^2(I)$ есть ортонормированный базис из экспонент. Однако, уже в случае двух отрезков он не обязательно существует [11]. Ближайшим обобщением ортонормированного базиса является базис Рисса, но построение и такого множества из экспонент — нетривиальная задача. А. Коленберг [12] решил ее для двух интервалов одинаковой длины, Л. Безуглая и В. Кацнельсон [13] — для случае, когда концы обоих интервалов — целые точки. В общем случае для двух интервалов этот результат получил К. Сейп [14].

Наконец, Г. Козма и Ш. Ницан [3] построили базис Рисса из экспонент в $L^2(I)$ случае, когда I — объединение конечного числа отрезков на прямой.

Предложенная ими конструкция (будем обозначать ее К) позволяет построить базис Рисса $\mathcal{E}(\Gamma)$ в $L^2(I)$, причем $\Gamma \subset \mathbb{Z}$, если $I \subset [0, 2\pi]$ — объединение конечного числа интервалов (мы рассмотрим лишь случай двух интервалов). Мы проследим за конструкцией К и добьемся того, чтобы получившийся в результате базис Рисса удовлетворял условию 1.

2.3.1 Случай отрезка малой длины

Как и в конструкции К, начнем с построения базиса Рисса на одном отрезке малой длины. Покажем, что при достаточно малом $\delta > 0$ можно построить целочисленный базис Рисса (то есть базис Рисса вида $\mathcal{E}(\Gamma)$, $\Gamma \subset \mathbb{Z}$) на $[0, \delta]$, удовлетворяющий условию 1 для $[0, \delta]$ и Γ.

Для ортонормированного базиса $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$, который также является базисом Рисса, согласно теореме об устойчивости базисов Рисса экспонент на интервалах существует $t > 0$ такое, что $\mathcal{E}(\Gamma)$ — базис Рисса, для любой последовательности $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, в которой $|\gamma_k - k| < t$. Положим $\delta = \frac{2\pi}{C}$, причем подберем C так, чтобы $Ct > 3$. Тогда $\mathcal{E}(C\mathbb{Z})$ — базис Рисса в $L^2(0, \delta)$, и это условие сохранится, если каждый элемент $\mathcal{E}(C\mathbb{Z})$ изменить не более чем на 1.

Будем делать такие замены следующим образом. На нулевом шаге положим $\gamma_0 = 0$. На шаге $k = 1, 2, \ldots$ рассмотрим сумму $0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{k-1} - C(k-1)$. Если она положительна, то положим $\gamma_k = \lfloor Ck \rfloor$, в противном случае $\gamma_k = \lceil Ck \rceil$. Наконец выберем $\gamma_{-k} = -\gamma_k$. Тогда все γ_k будут целыми. Пусть $\Delta_k = \gamma_k - Ck$. Из определения множества Γ следует, что при любом $k > 0$ выполняется неравенство $|\Delta_0 + \ldots + \Delta_k| \le 1$.

Покажем, что при любых целых $m < n$ выполнено неравенство

$$|\Delta_m + \Delta_{m+1} + \ldots + \Delta_n| \le 2.$$

В силу того, что $\gamma_k = -\gamma_k$, имеем $\Delta_{-k} = -\Delta_k$. Значит, указанное неравенство достаточно проверять лишь в случае $m, n \geqslant 0$. Остается лишь применить неравенство треугольника:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \Delta_k\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n} \Delta_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{m} \Delta_k\right| \le 2.$$

Далее покажем, что построенное множество Γ и $[0, \delta]$ удовлетворяют условию 1. Поскольку $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \frac{1}{\gamma_k^2} < \infty$, то следующее произведение множителей Вейерштрасса задает целую функцию порядка 1 типа $\delta/2$:

$$A(z) = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\gamma_k}\right) e^{\frac{z}{\gamma_k}} \left(1 - \frac{z}{\gamma_{-k}}\right) e^{\frac{z}{\gamma_{-k}}} = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\gamma_k}\right)\left(1 + \frac{z}{\gamma_k}\right).$$

Покажем, что при $x \in \mathbb{R}$ функция $A(x)$ ограничена. Поскольку эта функция нечетна и непрерывна, достаточно показать ограниченность при $x > 3C$.

Фиксируем $x > 3C$. Пусть n — ближайшее целое число к x/C. Тогда $n > 0$, а также $x > C(n-1)+1$ и $x < C(n+1)-1$. Обозначим

$$S(x) = \sin(\pi x/C) \cdot \frac{x-\gamma_n}{x-Cn} = \sin(\pi x/C)\left(1 - \frac{\Delta_n}{x-Cn}\right).$$

Заметим, что $|S(x)| < 2|\sin(\pi x/C)|$ при $|x-Cn| \geq 1$, так как $|\Delta_n| < 1$. Если же $0 < |x-Cn| < 1$, то по теореме Лагранжа существует ξ между x и Cn такое, что $\dfrac{\cos(\xi)}{C} = \dfrac{\sin(\pi x/C)}{x-Cn}$. Следовательно,

$$S(x) \leq \frac{|x-\gamma_n|}{C} \leq \frac{1+|\Delta_n|}{C} \leq 2.$$

Поскольку $S(x)$ непрерывна, из сказанного выше, $S(x) \leq 2\sin(\pi x/C)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Теперь заметим, что

$$\frac{A(z)}{S(z)} = \frac{z-Cn}{z-\gamma_n} \cdot \frac{A(z)}{\sin \pi z/C} = \frac{Cn}{\gamma_n} \prod_{k\neq 0, k\neq n} \frac{1-\frac{z}{\gamma_k}}{1-\frac{z}{Ck}} =$$
$$\frac{Cn}{\gamma_n} \prod_{k\neq 0, k\neq n} \frac{Ck}{\gamma_k}\left(1 - \frac{\Delta_k}{z-Ck}\right).$$

Бесконечные произведения, написанные строчкой выше, мы понимаем как предел при $N \to \infty$ соответствующих конечных произведений при $|k| < N$.

Следовательно,

$$\frac{A(x)}{S(x)} = \frac{Cn}{\gamma_n} \lim_{N\to\infty} \prod_{1\leq |k| \leq N, k\neq n} \frac{CK}{\gamma_k}\left(1 - \frac{\Delta_k}{x-Ck}\right). \tag{8}$$

Заметим, что

$$\prod_{1\leq |k| \leq N} \frac{Ck}{\gamma_k} = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{Ck}{\gamma_k}\right)^2 = \prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{\Delta_k}{\gamma_k}\right)^2 \leq \exp\{2(\Delta_1/\gamma_1 + \ldots + \Delta_N/\gamma_N).\} \tag{9}$$

Воспользуемся следующим общеизвестным утверждение, доказательство которого получается применением преобразования Абеля.

Утверждение 2. *Пусть $\{a_n\}$ — убывающая последовательность положительных чисел, $\{b_n\}$ — последовательность вещественных чисел такая, что числа $|b_1 + \ldots + b_n| \le C_0$ для некоторой константы $C_0 > 0$. Тогда $|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n| \le 3C_0 b_1$.*

Последовательность $\frac{1}{\gamma_m}$ убывает, а также при всех m выполняется неравенство $|\Delta_1 + \ldots + \Delta_m| \le 2$. Применяя утверждение 2 вместе с (9), для некоторой константы C_1 имеем

$$\prod_{1 \le |k| \le N} \frac{Ck}{\gamma_k} \le C_1. \tag{10}$$

Далее, применяя утверждение 1 к последовательностям $\{\Delta_m\}_{m=n+1}^{\infty}$ и $\{\frac{1}{Cm-x}\}_{m=n+1}^{\infty}$, получаем, что

$$\prod_{k=n+1}^{N} \left|1 - \frac{\Delta_k}{x - Ck}\right| \le \exp\left(\sum_{m=n+1}^{N} \frac{\Delta_m}{Cm - x}\right) \le \exp\left(\frac{2}{C(n+1) - x}\right) \le e^2. \tag{11}$$

Аналогично доказываем, что такое же произведение по $k < n, k \neq 0$ равномерно ограничено. Вместе с (10) и (11) это означает, что при некотором $C_2 > 0$ и всех $x > 3C$ выполнено неравенство $\left|\dfrac{A(x)}{S(x)}\right| \leqslant C_2$. Отсюда следует, что $|A(x)| \le |C_2 S(x)| \le 2C_2 |\sin(\pi x/C) \le 2C_2$, что завершает доказательство ограниченности функции A на $\mathbb{R}$.

2.3.2 Случаи отрезка произвольной длины и двух отрезков

Базис Рисса из экспонент с целыми частотами на произвольном отрезке вида $[0, p]$, где $p \le 2\pi$ получается в конструкции К с помощью такой леммы. Формулировка

Лемма 5 (Лемма 2 в [3]). *Пусть $E \subset [0, 2\pi]$, $N \in \mathbb{N}$, $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N \subset N\mathbb{Z}$. Пусть $V_n = \{x \in \left[0, \frac{2\pi}{N}\right]$: из чисел $x, x + \frac{2\pi}{N}, \ldots, x + \frac{2\pi(N-1)}{N}$ хотя бы n лежат в $E\}$. Положим*

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{n} (\Lambda_j + j).$$

Если $\mathcal{E}(\Lambda_j)$ — базис Рисса в $L^2(V_j)$ при всех $j = 1, 2, \ldots, N$, то $\mathcal{E}(\Lambda)$ — базис Рисса в $L^2(E)$.

Для данного δ выбираем N таким образом, чтобы $\delta = N\frac{p}{2\pi} - \lfloor N\frac{p}{2\pi} \rfloor$ было достаточно мало (а именно, $2\pi/\delta t > 3$). Пусть $m = \lfloor \frac{p}{2\pi} \rfloor$. Тогда

$$V_1 = \ldots = V_m = [0, 2\pi/N],$$

положим $\Lambda_j = N\mathbb{Z}$ при $j = 1, \ldots, m$. Также $V_{m+1} = [0, \frac{\delta}{N}]$ и $V_{m+1} = \ldots = V_N = \emptyset$. Согласно доказанному выше, в $L^2(0, \delta)$ можно выбрать базис Рисса $\mathcal{E}(\Gamma), \Gamma \subset \mathbb{Z}$, уловлетворяющий условию 1 с некоторой функцией A. Возьмем $\Lambda_{m+1} = N\Gamma$. Теперь покажем, что базис Рисса $\mathcal{E}(\Lambda)$ удовлетворяет условию 1. Положим

$$H(z) = \sin\left(\frac{z-1}{N}\right)\sin\left(\frac{z-2}{N}\right)\ldots\sin\left(\frac{z-m}{N}\right)A(z/N).$$

Функция $A(z)$ ограничена по модулю на вещественной прямой, имеет порядок 1 и тип $\delta/2$. Значит, функция A лежит в классе Картрайт. Итого, функция $H(z)$ также ограничена по модулю на вещественной прямой, имеет порядок 1 и тип $\frac{1}{2}\left(\delta/N + \frac{m}{n}\right) = p/2$.

Аналогично, используя лемму 5, мы можем построить базис Рисса, удовлетворяющий условию 1, на двух отрезках.

Список литературы

[1] R. Young, On Complete Biorthogonal Systems, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 83, no. 3, 1981, pp. 537–540.

[2] A. Beurling, P. Malliavin, Acta Math. 118 (1967), pp. 79-93.

[3] G. Kozma, S. Nitzan, Combining Riesz bases, Invent. math. 199 (2015), pp. 267–285.

[4] Б.Я. Левин, Распределение корней целых функций (1956), pp. 498-504.

[5] A. Olevskii, A. Ulanovskii, Functions with disconnected spectrum: Sampling, interpolation, translates, University Lecture Series, vol. 65, American Mathematical Society, Providence, RI (2016).

[6] E. Fricain, Complétude des noyaux reproduisants dans les espaces modeles, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), Tome 52, no. 2 (2002), pp. 661–686.

[7] A. Baranov, Y. Belov, Systems of Reproducing Kernels and their Biorthogonal: Completeness or Incompleteness?, International Mathematics Research Notices, vol. 2011, Issue 22 (2011), pp. 5076–5108.

[8] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels, Advances in Mathematics, vol. 235 (2013), pp. 525-554.

[9] Y. Belov, Uniqueness of Gabor series, Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. 39, Issue 3 (2015), pp 545-551.

[10] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, The Young type theorem in weighted Fock spaces, Bulletin of The London Mathematical Society, vol. 50 (2018), pp. 357-363.

[11] A. Iosevich and M. N. Kolountzakis, Periodicity of the spectrum in dimension one. Analysis and PDE 6:4 (2013), pp. 819–827.

[12] A. Kohlenberg, Exact Interpolation of Band-Limited Functions. J. Appl. Phys. 24:12 (1953), pp. 1432–1436.

[13] L. Bezuglaya, V. E. Katsnel'son, The sampling theorem for functions with limited multi-band spectrum, Z. Anal. Anwendungen 12:3 (1993), pp. 511–534.

[14] K. Seip, A simple construction of exponential bases in L^2 of the union of several intervals. Proc. Edinburgh Math. Soc. 38:1 (1995), pp. 171–177.

[15] H. J. Landau, Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions, Acta Math. 117 (1967), 37-52.